ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

Mathématiques 1re épreuve

Durée 4 heures

Dans tout le problème on désigne par :

- n *un entier naturel non-nul,*
- p *un nombre de l'intervalle* $]0,1[$,
- p_1, p_2, p_3 *des nombres réels strictement positifs,*
- $\mathbb{N}_n$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{N}$ *formé par les entiers naturels au plus égaux à* n.

Si X est une variable aléatoire réelle discrète dont la distribution de probabilité est définie par :

$$P(X=x_i) = \alpha_i \quad , \quad (i \in \mathbb{N}_n) \ ,$$

et si k est un entier naturel non-nul, on appelle :

- *moment d'ordre k de X le nombre* $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i x_i^k$
- *moment centré d'ordre k de X le nombre* $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i (x_i - E(X))^k$

où E(X) désigne l'espérance mathématique de X.

PARTIE PRELIMINAIRE

1/ Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que $x+y \leqslant n$ on a les égalités :

$$C_n^x . C_{n-x}^y = C_n^y . C_{n-y}^x = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$$

.../...

2/ Soit Z une variable aléatoire dont la distibution de probabilité est binomiale de paramètres n,p. Pour tout entier naturel k non-nul , on désigne respectivement par μ_k et m_k les moment et moment centré d'ordre k de la variable aléatoire Z. Démontrer que :

$$\mu_{k+1} = np\mu_k + p(1-p).\frac{d\mu_k}{dp}$$

et pour $k \geqslant 2$:

$$m_{k+1} = p(1-p)\left[nkm_{k-1} + \frac{dm_k}{dp}\right] ,$$

où $\frac{d\mu_k}{dp}$ et $\frac{dm_k}{dp}$ sont les dérivées de μ_k et m_k par rapport à p.

PARTIE I

Soit T_n le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par :

$$T_n = \{(x,y)/x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}, x+y\leqslant n\} .$$

On considère la fonction f définie sur T_n par :

$$f(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x.p_2^y.p_3^{n-x-y} .$$

1/ A quelle condition doivent satisfaire p_1,p_2,p_3 pour que l'on ait :

$$\sum_{(x,y)\in T_n} f(x,y) = 1 \ ?$$

On supposera cette condition réalisée dans toute la suite du problème.

2/ On considère la variable aléatoire discrète à deux dimensions,notée (X,Y),dont la distribution de probabilité conjointe est définie pour tout (x,y) élément de T_n par :

$$P(X=x,Y=y) = f(x,y).$$

a/ Déterminer les distributions de probabilité marginales des variables aléatoires X et Y.

b/ En déduire les espérances mathématiques E(X),E(Y) ainsi que les variances V(X) et V(Y) des variables aléatoires X et Y.

c/ Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes? Justifier votre réponse.

.../...

3/a/ Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire S=X+Y.

b/ Déduire de (I,3,a) la valeur de la covariance des variables aléatoires X et Y, puis celle de leur coefficient de corrélation linéaire.

PARTIE II

1/a/ Etant donné y élément de $\mathbb{N}_n$, déterminer la distribution de probabilité conditionnelle de X sachant (Y=y).

Dans la suite du problème on notera X_y *la variable aléatoire ayant cette distribution de probabilité.*

b/ La distribution de probabilité de X_y est "*classique*", la reconnaître et en donner les paramètres.

2/ Déterminer en fonction de n, y, p_1, p_2 l'espérance mathématique $E(X_y)$ et la variance $V(X_y)$ de la variable aléatoire X_y.

3/ Pour tout entier naturel non-nul k, on désigne respectivement par $\mu_{y,k}$ et $m_{y,k}$ les moment et moment centré d'ordre k de la variable aléatoire X_y. Etablir les relations (1) et (2) suivantes :

$$(1)\quad \mu_{y,k+1} = (n-y)\frac{p_1}{1-p_2}\mu_{y,k} + \frac{p_1 p_3}{(1-p_2)^2}\cdot\frac{d\mu_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}$$

et pour $k \geqslant 2$:

$$(2)\quad m_{y,k+1} = \frac{p_1 p_3}{(1-p_2)^2}\left[(n-y)k m_{y,k-1} + \frac{dm_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}\right],$$

où $\dfrac{d\mu_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}$ et $\dfrac{dm_{y,k}}{d\left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)}$ représentent les dérivées par rapport à $\dfrac{p_1}{1-p_2}$ de $\mu_{y,k}$ et $m_{y,k}$.

.../...

4/ Que deviennent les résultats des questions II 1/,2/,3/, lorsque l'on considère la distribution de probabilité conditionnelle de Y sachant (X=x) ?

On notera dans la suite du problème Y_x *la variable aléatoire ayant cette distribution de probabilité.*

PARTIE III

Soient φ et ψ les applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi(x) = E(Y_x) \text{ et } \psi(y) = E(X_y) .$$

Le plan affine étant rapporté au repère $(0;\vec{x},\vec{y})$ on considère les représentations graphiques C et Γ des fonctions :

$$y = \varphi(x) \text{ et } x = \psi(y) .$$

1/ Construire C et Γ dans le cas particulier :

$n = 12$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/6$.

2/ On appelle support φ^s et ψ^s des fonctions φ et ψ , les fonctions affines réelles dont les restrictions à $\mathbb{N}_n$ sont respectivement φ et ψ . On note C^s et Γ^s leur représentation graphique.

a/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C^s et Γ^s .

b/ A quelle(s) condition(s) C et Γ ont-elles un point commun ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail